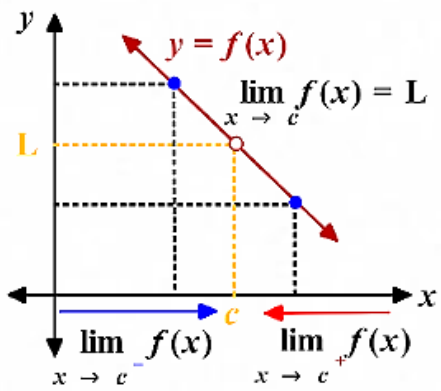
16) النهايات

تقدير النهايات بيانيًا

- المقصود به : قيمة الدالة عند اقتراب قيم x من العدد c من جهتي اليمين واليسار .



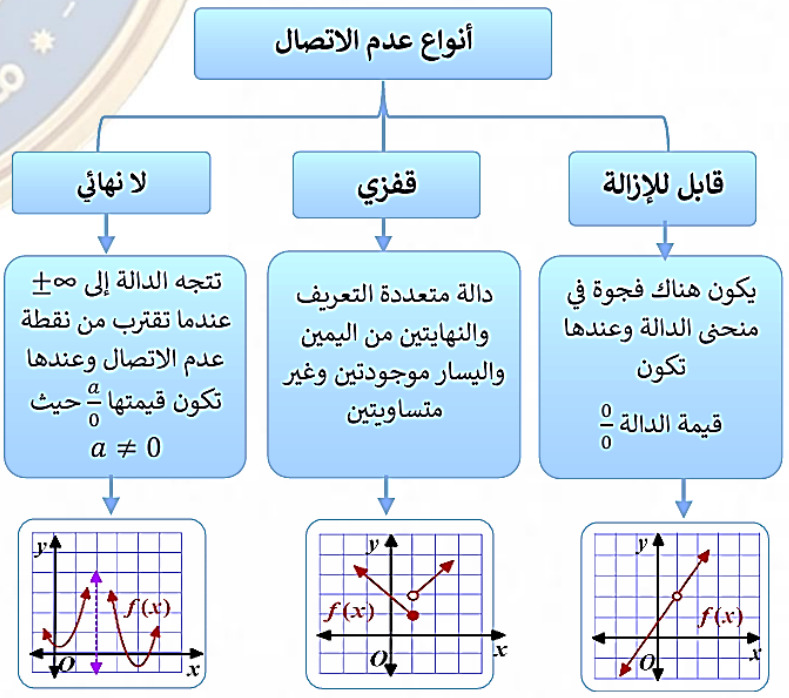
النهاية اليمنى	النهاية اليسرى
$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$	$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$

- النهاية عند نقطة : لها حالتان .....

موجود	غير موجود
النهاية اليمنى تساوي اليسرى ، ولها نفس قيمة النهايتين	النهاية اليمنى لا تساوى اليسرى

النهايات والاتصال عند نقطة

- تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = a$ إذا كان $f(a) = lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a^-} f(x) = L$



---

① إذا كان $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -5$ و $f(3) = 7$ ، فما قيمة $\lim_{x\to 3} f(x)$ ؟

A	3	B	5
C	7	D	غير موجودة

② الدالة $f(x)$ معرفة كالتالي : $f(x) = \begin{cases} -x+3 & , \ x < 1 \\ x^2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$ ، ما قيمة $\lim_{x\to -1} f(x)$ ؟

A	-1	B	1
C	4	D	غير موجودة

③ قيم a التى تجعل الدالة $f(x) = \begin{cases} a^2+2x & , \ x \geq 1 \\ a+4 & , \ x < 1 \end{cases}$ متصلة عند $x = 1$ هي .....

A	$0\ ,1$	B	$0, -1$
C	$-1, 2$	D	$1\ , -2$

④ إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x+4} & , \ x < 4 \\ x-2k & , \ x \geq 4 \end{cases}$ متصلة عند $x = 4$ ، فما قيمة k ؟

A	-4	B	-2
C	2	D	4

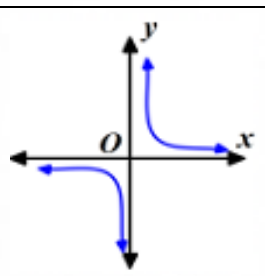
⑤ الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ غير متصلة عند $x = 2$ ، ما نوع عدم الاتصال ؟

A	لا نهائي	B	نقطي
C	قفزي	D	قابل للإزالة

⑥ أوجد نقاط عدم الاتصال للدالة $f(x) = \frac{5}{x^2-4x+3}$ ؟

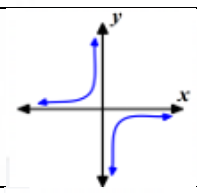
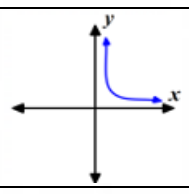
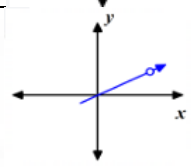
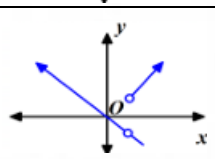
A	$-1\ ,3$	B	$1\ , -3$
C	$1, 3$	D	$-1\ , -3$

⑦ تكون الدالة الممثلة في الشكل غير معرفة عند x تساوي .....

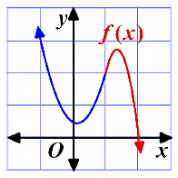


A	0	B	5
C	2	D	3

⑧ أي التمثيلات البيانية التالية يُمثل دالة عدم اتصال لا نهائي ؟

A		B	
C		D	

النهـايـات وسلوك طرفي التمثيل البياني



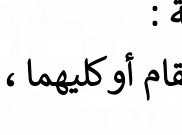
- سلوك الطرف الأيمن .....

$$lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

- سلوك الطرف الأيسر ....

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

- فائدة : من الممكن أن يقترب الطرف الأيمن أو الطرف الأيسر لبعض الدوال من عدد حقيقي ، فمثلًا ....



- سلوك الطرف الأيمن ....

$$lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

- سلوك الطرف الأيسر .....

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

حسـاب النهـايـات جبريـًا

- لإيجاد $lim_{x\to c} f(x)$ جبريًا فإننا نعوض في $f(x)$ عن كل X بـ c "التعويض المباشر" .
  - مثال توضيحي : نُوجد $lim_{x\to4}(4x-1)$ كالتالي :

$$lim_{x\to4}(4x-1) = 4(4)-1 = 16-1 = 15$$

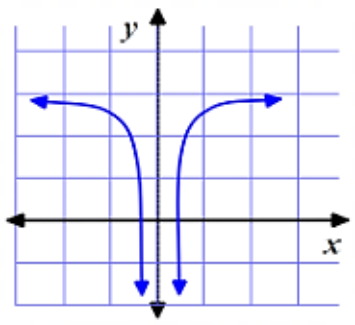
- تنبيه 1 : إذا كانت $lim_{x\to c} f(x) = \frac{1}{0}$ عند التعويض المباشر فإن النهاية غير موجودة .
- تنبيه 2 : إذا كانت $lim_{x\to c} f(x) = \frac{0}{0}$ عند التعويض المباشر فإن الصيغة غير محددة ويجب معالجتها بإحدى الطرائق التالية :
  - نحلل البسط أو المقام أو كليهما ، ثم نختصر العوامل المشتركة .
  - إذا كان البسط يحوى جذرًا تربيعًا فإننا نضرب بسطًا ومقامًا في مرافق البسط ، وكذلك إذا كان المقام يحوى جذرًا تربيعيًا فإننا نضرب بسطًا و مقامًا في مرافق المقام .
- مثال توضيحي : نوجد $lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ كالتالي

$$lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{1-3(1)+2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

فنحلل البسط بالبحث عن عددين مجموعهما -3 وحاصل ضربهما $+2$ ، وهما -2 و -1 ....

$$lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = -2$$

⑨ أي التالي يصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ؟



A	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ , \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
B	$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ , \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
C	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3 \ , \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$
D	$\lim_{x\to\infty} f(x) = -4 \ , \lim_{x\to-\infty} f(x) = -4$

⑩ ما قيمة $\lim_{x\to2}(x^2-3x+1)$ ؟

A	-2	B	-1
C	1	D	2

⑪ $\lim_{x\to5}(3x^3-5x^2-3x-10)$ تساوي .....

A	125	B	225
C	235	D	275

⑫ ما قيمة $\lim_{x\to0}(x^3\ \cos x)$ ؟

A	0	B	1
C	2	D	3

⑬ ما قيمة $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$ ؟

A	$3+\sqrt{7}$	B	$3-\sqrt{7}$
C	$\sqrt{7}-3$	D	3

⑭ ما قيمة $\lim_{x\to4}\frac{x^2-x-12}{x-4}$ ؟

A	0	B	3
C	4	D	7

⑮ ما قيمة $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ ؟

A	0	B	6
C	4	D	8

⑯ $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ تساوي ....

A	$\frac{1}{9}$	B	0
C	$\frac{1}{6}$	D	غير موجودة

نهايات الدوال عند المالانهاية

- أهم خصائص $+\infty$ و $-\infty$ ..
  - لا يتغيران إذا ضربناهما أو قيمناهما على أي عدد عدا الصفر ، ولكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات .....

موجب "× أو ÷" موجب ← موجب

سالب "× أو ÷" سالب ← موجب

موجب "× أو ÷" سالب ← سالب

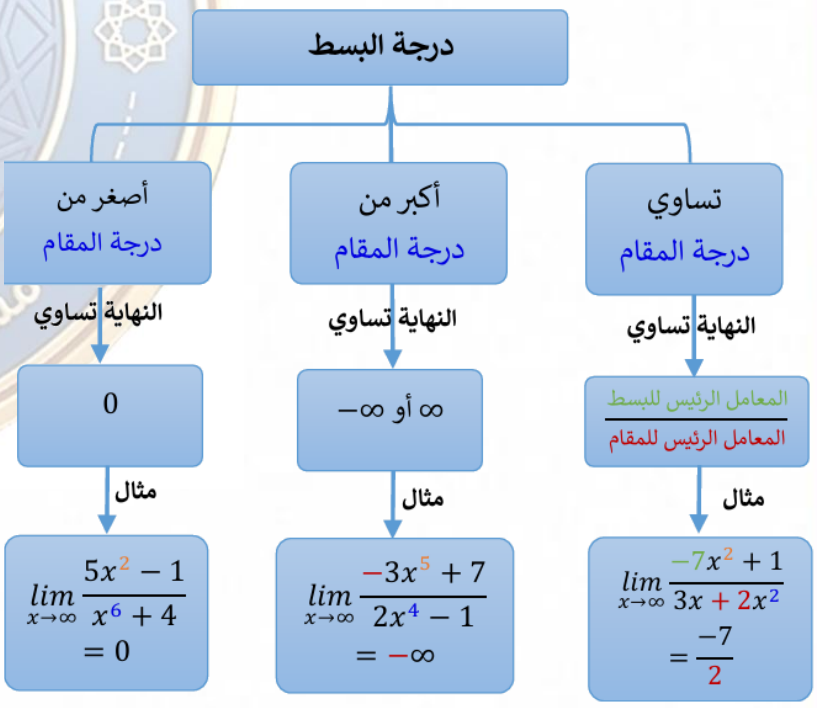
  - إذا قسمنا أي عدد عليهما يكون الناتج صفرًا .
  - لا يتغيران إذا رفعناهما لأس موجب ، ولكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات .....

$$(\pm\infty)^{\text{عدد فردي}} = \pm\infty \ , \ (\pm\infty)^{\text{عدد زوجي}} = \infty$$

- نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية : نعوض عن قيمة X في الحد الرئيس "الحد ذي القوة الأكبر" فقط ، فمثلا .....

$$\lim_{x\to\infty}(4x^6+3x^5) = \lim_{x\to\infty} 4x^6 = 4(\infty)^6 = \infty$$

- نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية : لها 3 حالات ...



⑰ $\lim_{x\to\infty}(x^2+x+2)$ تساوي			
A	$-\infty$	B	0
C	1	D	∞

⑱ $\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$ تساوي			
A	$-\infty$	B	0
C	2	D	∞

⑲ النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x+3}$ تساوي			
A	0	B	2
C	3	D	∞

⑳ $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ تساوي			
A	10	B	5
C	2	D	0

㉑ ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x^3}{2x^3+5}$ ؟			
A	$\frac{3}{2}$	B	1
C	-1	D	$\frac{-3}{2}$

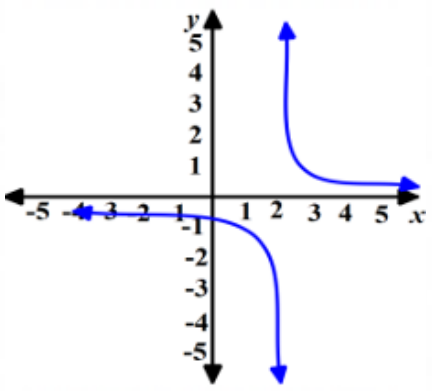
㉒ إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{Ax}{3+\lvert x\rvert}$ ، فما قيمة A ؟			
A	6	B	2
C	-2	D	-6

㉓ $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+x-22}{4x^3-13}$ تساوي			
A	8	B	4
C	2	D	0

㉔ ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-2}$ ؟			
A	-4	B	0
C	4	D	∞

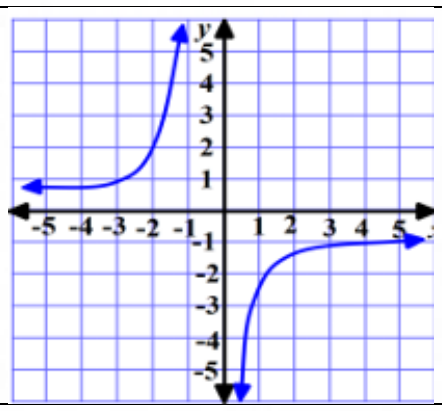
㉕ ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-4}$ ؟			
A	$-\infty$	B	0
C	2	D	∞

تجميعات إضافية على الدرس السـادس عشـر



㉖ الدالة التالية تكون غير معرفة عندما تكون x تساوي :

(A)	0	(B)	1
(C)	2	(D)	1



㉗ $\lim_{x\to 0} f(x)$ تساوى

(A)	$-\infty$	(B)	غير موجودة
(C)	$+\infty$	(D)	صفر

㉘ النهاية $\lim_{x\to 4}(4x-1)$ تساوي :

(A)	4	(B)	8	(C)	12	(D)	15

㉙ ما قيمة $\lim_{x\to 2} \frac{2x+2}{x^2+3x+2}$ ؟

(A)	-2	(B)	2	(C)	$\frac{1}{2}$	(D)	$\frac{1}{3}$

㉚ ما قيمة $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+6}{x-1}$

(A)	4	(B)	0	(C)	-2	(D)	-4

㉛ ما قيمة $\lim_{x\to 0}(4^x - \cos x + 2x - 1)$ ؟

(A)	-2	(B)	1	(C)	-1	(D)	-2

㉜ إذا كان $\lim_{x\to 1}(x^2 - bx + 2) = 11$ فإن قيمة b تساوي

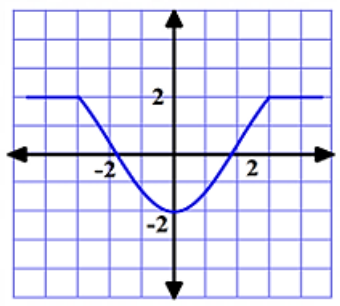
(A)	-9	(B)	-8	(C)	10	(D)	12

㉝ ما قيمة $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-3}$ ؟

(A)	$3-\sqrt{3}$	(B)	$3+\sqrt{3}$	(C)	$\sqrt{3}-3$	(D)	2

٣٤	ما قيمة $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-3}$ ؟						
(A)	$3+\sqrt{3}$	(B)	$3-\sqrt{3}$	(C)	3	(D)	1
٣٥	ما قيمة النهاية $\lim_{b\to 0}\frac{\sqrt{2-b}-\sqrt{2}}{b}$.						
(A)	$\frac{-\sqrt{2}}{4}$	(B)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(C)	0	(D)	$\frac{1}{2}$
٣٦	النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$ تساوي						
(A)	$-\frac{1}{5}$	(B)	0	(C)	$\frac{3}{2}$	(D)	∞
٣٧	ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3-12x}{5+x^2-2x^3}$						
(A)	-5	(B)	-2	(C)	2	(D)	5
٣٨	أوجد قيمة k فيما يلي : $\lim_{x\to\infty}\frac{kx^5+3x^4+x^2}{6x^5+2x^3+1}=1$						
(A)	6	(B)	0	(C)	1	(D)	4
٣٩	أوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3+3x}{2x^2-2x^3}$						
(A)	2	(B)	-5	(C)	15	(D)	∞
٤٠	قيمة A في المقدار التالي : $\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^2}{3+x\lvert x\rvert}=2$						
(A)	6	(B)	2	(C)	0	(D)	-6

٤١	في الشكل التالي : $\lim_{x\to\infty} f(x)=$			
(A)	-2	(B)	$-\infty$	
(C)	2	(D)	∞	



٤٢	احسب $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$						
(A)	6	(B)	0	(C)	$\frac{1}{6}$	(D)	∞
٤٣	ما القيمة التى تقترب منها $g(x)=\frac{\pi+x}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0 ؟						
(A)	$-\pi$	(B)	0	(C)	$\frac{-\pi}{2}$	(D)	$\frac{-\pi}{4}$

٤٤ $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$							
(A)	$\frac{1}{2}$	(B)	2	(C)	4	(D)	$\frac{1}{4}$
٤٥ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-7x+6}$							
(A)	$-\frac{1}{5}$	(B)	0	(C)	2	(D)	-2
٤٦ $\lim_{x\to 0} x^2 \cos x$							
(A)	0	(B)	1	(C)	4	(D)	3

١	D	١١	B	٢١	D	٣١	C	٤١	B
٢	D	١٢	A	٢٢	B	٣٢	B	٤٢	A
٣	C	١٣	B	٢٣	D	٣٣	C	٤٣	A
٤	C	١٤	D	٢٤	D	٣٤	B	٤٤	D
٥	A	١٥	C	٢٥	D	٣٥	A	٤٥	A
٦	C	١٦	B	٢٦	C	٣٦	C	٤٦	A
٧	A	١٧	D	٢٧	B	٣٧	A		
٨	A	١٨	D	٢٨	D	٣٨	A		
٩	C	١٩	C	٢٩	C	٣٩	B		
١٠	B	٢٠	C	٣٠	D	٤٠	B		