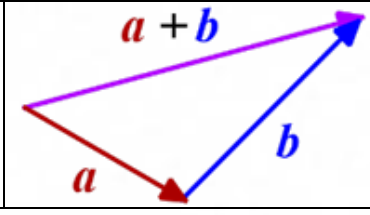
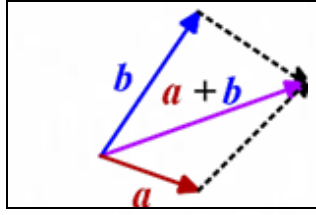
14) المتجهات

بعض العلاقات بين متجهين

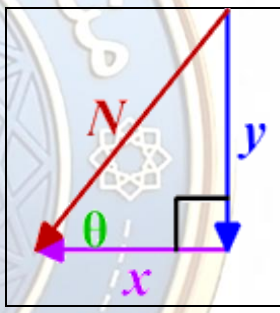
- المتجهان المتوازيان : لهما نفس الاتجاه إذا كان لهما نفس الإشارات ، أما إذا اختلفت الإشارات فإن لهما اتجاهين متعاكسين .
- المتجهان المتساويان : لهما الاتجاه نفسه والطول نفسه.
- المحصلة : نوجد محصلة المتجهين a و b باستخدام...

قاعدة المثلث	قاعدة متوازي الأضلاع
	

- فائدة : إذا كان المتجهان متعامدين فإننا نُوجد قيمة متجه المحصلة باستخدام نظرية فيثاغورث.

تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين

المركبة الأفقية	$\|x\| = N\cos\theta$
المركبة الرأسية	$\|x\| = N\sin\theta$



- فائدة : كلما تقترب قيمة θ من الصفر تزداد قيمة المركبة الأفقية .

مثال : يدفع على عربة قص عشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياسها $60°$ مع سطح الأرض ، ما مقدار المركبة الأفقية ؟

المركبة الأفقية = $N\cos\theta = 450\ \cos 60°$

$= 450 \times \frac{1}{2}$

$= 225\ N$

---

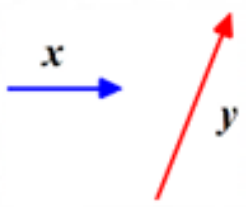
① إذا كان المتجهة $a = \langle 3, 5\rangle$ يوازي المتجه b وعكس اتجاهه ، فإن b يساوي .....

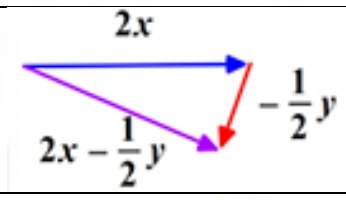
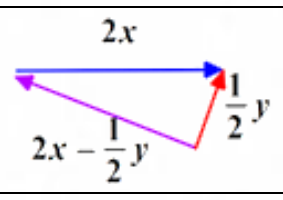
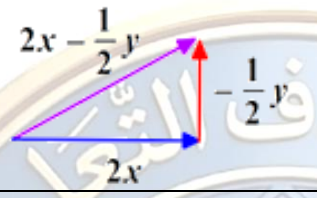
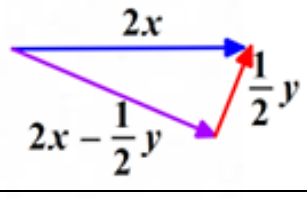
A	$\langle -3, -5\rangle$	B	$\langle 0, 3\rangle$
C	$\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\rangle$	D	$\langle 6, 10\rangle$

② إذا كان المتجهان $8\ xy$ ، $5\ xy$ متوازيين ومتعاكسين فإن محصلتهما تساوي ....

A	$3\ xy$	B	$5\ xy$
C	$8\ xy$	D	$13\ xy$

③ إذا كان الشكل يُمثل المتجهين x, y ، فأي التالي يُمثل المتجه $2x - \frac{1}{2}y$ ؟

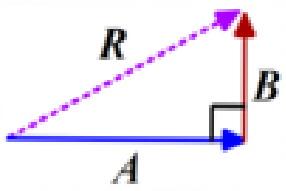


A		B	
C		D	

④ إذا كان A, B, C ثلاث نقاط في مستوى فإن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ تساوي ....

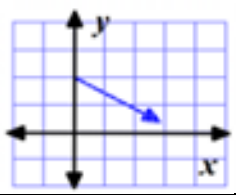
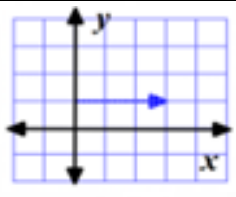
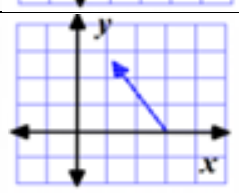
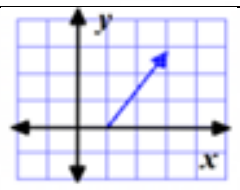
A	AB	B	$\overrightarrow{AB}$
C	AC	D	$\overrightarrow{AC}$

⑤ في الشكل ، إذا كانت قيمة المتجهة A تساوي 5 ، وقيمة المتجه B تساوي 6 ، فما قيمة متجه المحصلة R ؟



A	$\sqrt{61}$	B	$\sqrt{40}$
C	$\sqrt{13}$	D	$\sqrt{11}$

⑥ أي المتجهات التالية له مركبة أفقية أكبر ؟

A		B	
C		D	

⑦ تسير باخرة بزاوية قيمتها $60°$ مع الأفق وبسرعة $100\ km/h$ ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة ؟

A	AB	B	$\overrightarrow{AB}$
C	AC	D	$\overrightarrow{AC}$

المتجهات في المستوى الإحداثي

- الصورة الإحداثية لمتجه بدايته النقطة $A(x_1 , y_1)$ ونهايته النقطة $B(x_2 , y_2)$ ....

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle = \langle x , y \rangle$$

مثـال : ما الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(5 , 3), B(6 , -9)$ ؟

Ⓐ $\langle 11 , -6 \rangle$ Ⓑ $\langle 1 , -12 \rangle$

Ⓒ $\langle -1 , 12 \rangle$ Ⓓ $\langle 30 , 27 \rangle$

الحـل :

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$$
$$= \langle 6 - 5 , -9 - 3 \rangle = \langle 1 , -12 \rangle$$

- طول متجه : إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle x , y \rangle$ فإن .....

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

العمليات على المتجهات في المستوى

- للمتجهين $a = \langle a_1 , a_2 \rangle , b = \langle b_1 , b_2 \rangle$ ....

جمع المتجهين	$a + b = \langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 \rangle$
طرح المتجهين	$a - b = \langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 \rangle$
ضرب المتجه a بعدد حقيقي	$ka = \langle ka_1 , ka_2 \rangle$

- مثال توضيحي : إذا كان $u = \langle 3 , -2 \rangle , v = \langle 5 , 7 \rangle$ فإن .....

$$u + v = \langle 3 + 5 , -2 + 7 \rangle = \langle 8 , 5 \rangle$$
$$u - v = \langle 3 - 5 , -2 - 7 \rangle = \langle -2 , -9 \rangle$$
$$4u = \langle 4(3) , 4(-2) \rangle = \langle 12 , -8 \rangle$$

العمليات على المتجهات في المستوى

- متجه الوحدة باتجاه المتجه v ، متجه طوله 1 وحدة طول واتجاهه نفس اتجاه v

$$u = \frac{v}{|v|}$$

متجه الوحدة باتجاه v ، طول المتجه v

- متجها الوحدة القياسيان .....

$\mathbf{i} = \langle 1 , 0 \rangle$, $j = \langle 0 , 1 \rangle$

متجه الوحدة باتجاه x

متجه الوحدة باتجاه y

- التوافق الخطي : كتابة المتجه $v = \langle a , b \rangle$ على الصورة $v = ai + bj$

---

⑧ ما الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $B(2 , -5) , A(-4 , 1)$ ؟

A	$\langle -8 , -5 \rangle$	B	$\langle -4 , 1 \rangle$
C	$\langle 6 , -6 \rangle$	D	$\langle 2 , -5 \rangle$

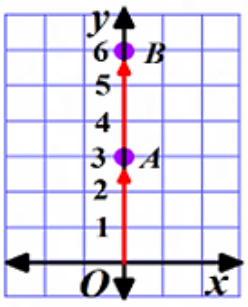
⑨ إذا كانت الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB} = \langle 7 , 4 \rangle$ ، وكانت $B(4 , 5) , A(d , 1)$ فإن d تساوي .....

A	-3	B	0
C	3	D	7

⑩ طول المتجه $c = \langle 0 , 6 \rangle$ يساوي .....

A	8	B	6
C	4	D	2

⑪ من التمثيل البياني إذا كان طول المتجه $OA = 3$ ، فما طول المتجه AB ؟



A	0	B	3
C	5	D	6

⑫ إذا كان $A = \langle 3 , 4 \rangle , B = \langle 2 , -1 \rangle$ ، فأوجد $3A - B$

A	$\langle 7 , 13 \rangle$	B	$\langle 1 , 5 \rangle$
C	$\langle 11 , 13 \rangle$	D	$\langle 7 , 3 \rangle$

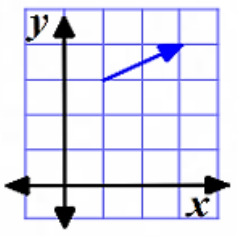
⑬ إذا كان $A = \langle 1 , 2 \rangle , B = \langle -3 , 5 \rangle , C = \langle 4 , 0 \rangle$ ، فأوجد $C - 2A + B$

A	$\langle 1 , -1 \rangle$	B	$\langle -1 , 1 \rangle$
C	$\langle 0 , -14 \rangle$	D	$\langle -14 , 0 \rangle$

⑭ متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه $v = \langle \sqrt{2} , \sqrt{2} \rangle$ هو .....

A	$\langle \frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$	B	$\langle -1 , -1 \rangle$
C	$\langle \frac{1}{2} , \frac{1}{2} \rangle$	D	$\langle \frac{-1}{2} , \frac{-1}{2} \rangle$

⑮ أي التالي يعبر عن المتجه الممثل في الشكل ؟



A	$3\mathbf{i} + \mathbf{j}$	B	$-3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
C	$2\mathbf{i} - \mathbf{j}$	D	$-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

⑯ المتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $B(6 , 3), A = (-2 , 7)$ يكتب بدلالة متجهي الوحدة على الصورة ....

A	$8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$	B	$-8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
C	$4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$	D	$-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

المتجه بمعلومية طوله وزاوية اتجاهه

- اتجاه المتجه : قياس الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور x
- إذا علمنا طول المتجهه v وزاوية اتجاهه مع الأفقي "الاتجاه الموجب لمحور x" فإن اللصورة الإحداثية له
$$\mathrm{v} = \langle |\mathrm{v}|\ \cos\theta\ , |\mathrm{v}|\ \sin\theta \rangle$$
- إذا علمنا إحداثي متجه $\mathrm{v} = (a\ , b)$ يمكننا حساب زاوية اتجاهه من إحدى العلاقتين التاليتين :

a موجبة	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
a سالبة	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$

الضرب الداخلي لمتجهين

- إذا كان $a0 = \langle a_1\ , a_2 \rangle\ , b = \langle b_1\ , b_2 \rangle$ متجهان في المستوى الإحداثي فإن ....
$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$
الضرب الداخلي "القياسي"
- شرط تعامد متجهين أن يكون $a \cdot b = 0$
- قياس الزاوية بين متجهين .....
$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\ |b|}$$
قياس الزاوية بين متجهين ، الضرب القياسي للمتجهين ، ضرب طولى المتجهين

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

- إذا كان $A(x_1\ , y_1\ , z_1)$ و $B(x_2\ , y_2\ , z_2)$ فإن ....
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1\ , y_2 - y_1\ , z_2 - z_1 \rangle = \langle x\ , y\ , z \rangle$$
- متجهات الوحدة القياسية .....
$$\mathrm{i} = \langle 1\ , 0\ , 0 \rangle\ \ , \mathrm{j} = \langle 0\ , 1\ , 0 \rangle\ , \mathrm{k} = \langle 0\ , 0\ , 1 \rangle$$
- التوافق الخطي : كتابة المتجه
$$\mathrm{v} = v_1 \mathrm{i} + v_2 \mathrm{j} + v_3 \mathrm{k}$$
- طول المتجه : $|\mathrm{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
- متجه الوحدة باتجاه : v : $\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|}$

⑰ ما الصورة الإحداثية لمتجه طوله 6 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $150°$ ؟

A	$\langle -3\sqrt{3}\ , 3 \rangle$	B	$\langle 3\ , -3\sqrt{3} \rangle$
C	$\langle 3\ , 3\sqrt{3} \rangle$	D	$\langle 3\sqrt{3}\ , -3 \rangle$

⑱ أي المتجهات طوله $2\sqrt{2}$ وزاوية اتجاهه $45°$ ؟

A	$\langle 2\ , -2 \rangle$	B	$\langle -2\ , 2 \rangle$
C	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$	D	$2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

⑲ إذا كان $\boldsymbol{C = (0\ , 0)\ , A = (7, 3)\ , B = (3\ , 4)}$ ، فأوجد $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA}$

A	0	B	5
C	25	D	28

⑳ إذا كان حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يساوي صفر فإن الزاوية بينهما تكون .....

A	حادة	B	قائمة
C	منفرجة	D	مستقيمة

㉑ المتجه العمودي على المتجه $\mathbf{v} = (4\ , -1)$ هو .....

A	$\langle -1\ , 4 \rangle$	B	$\langle 8\ , 2 \rangle$
C	$\langle 2\ , 8 \rangle$	D	$\langle 1\ , -4 \rangle$

㉒ إذا كان $\mathbf{c} = \langle -2\ , 7 \rangle\ , \mathbf{w} = \langle 8\ , 4 \rangle\ , \mathbf{v} = \langle 2\ , -5 \rangle\ , \mathbf{u} = \langle -3\ , 6 \rangle$ ، فإن المتجهين المتعامدين هما .....

A	u , v	B	v , w
C	u , w	D	v , c

㉓ ما قيمة a التى تجعل المتجهين $\boldsymbol{u = ai + 2j\ , v = 3i + 6j}$ متعامدين ؟

A	-4	B	-3
C	3	D	4

㉔ إذا كان $\boldsymbol{a = \langle -9\ , k \rangle\ , b = \langle -5\ , -15 \rangle}$ ، فإن قيمة $\boldsymbol{k}$ التى تجعل المتجهين متعامدين هي .....

A	$\frac{1}{3}$	B	3
C	$\frac{25}{3}$	D	27

㉕ ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3\ .\ 3 \rangle\ , \langle 2\ , 0 \rangle$ ؟

A	$30°$	B	$35°$
C	$120°$	D	$135°$

الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء

- إذا كان $b = (b_1 , b_2 , b_3)$ و $a = (a_1 , a_2 , a_3)$ متجهين في الفضاء ثلاثي الأبعاد فإن .....

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

الضرب الداخلي

- للتذكير : شرط تعامد متجهين أن يكون $a \cdot b = 0$.

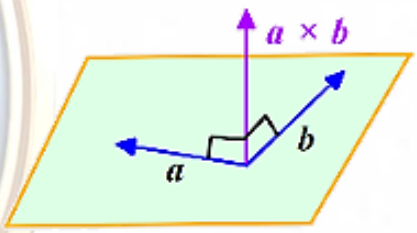
الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

- إذا كان $b = (b_1 , b_2 , b_3)$ و $a = (a_1 , a_2 , a_3)$ متجهين في الفضاء ثلاثي الأبعاد فإن .....

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

- الضرب الاتجاهي $a \times b$ يُعطي متجهًا عموديًا على المستوى الذي يحوي المتجهين a , b .



- إذا كان المتجهان a , b ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع فإن .....

مساحة متوازي الأضلاع $= |a \times b|$

طول المتجه $(a \times b)$

---

(٢٦) إذا كان $a = \langle 0 , 5 , 3 \rangle , b = \langle 7 , 0 , 1 \rangle$ ، فإن $a \cdot b$ يساوي .....

A	3	B	12
C	21	D	35

(٢٧) إذا كان $u = \langle 4 , x , 2 \rangle , v = \langle 2 , -3 , 5 \rangle$ ، فما قيمة x التى تجعل المتجهين متعامدين ؟

A	8	B	7
C	6	D	5

(٢٨) إذا كان $u = \langle 1 , -1 , 0 \rangle , v = \langle 0 , 2 , 1 \rangle$ متجهين فإن $u \times v$ يساوي .....

A	$\langle -1 , -1 , 2 \rangle$	B	$\langle 1 , 1 , -2 \rangle$
C	$\langle -1 , 1 , 2 \rangle$	D	$\langle 1 , -1 , -2 \rangle$

(٢٩) إذا كان $u = \langle 2 , 1 , -2 \rangle , v = \langle -2 , 5 , 3 \rangle$ متجهين فإن $u \times v$ يساوي .....

A	$\langle -4 , 5 , -6 \rangle$	B	$\langle 13 , 2 , 12 \rangle$
C	$\langle 13 , -2 , 12 \rangle$	D	$\langle -7 , -2 , 5 \rangle$

(٣٠) أوجد $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

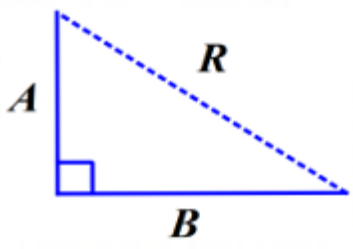
A	$2i + j + 4k$	B	$-2i + j - 4k$
C	$2i - j + 4k$	D	$-2i - j - 4k$

(٣١) متوازي أضلاع فيه $u = 7i + 2j - 2k$ و $v = 4i + 3j - k$ ضلعان متجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة ؟

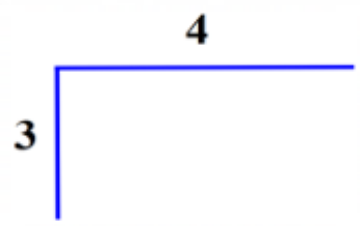
A	13	B	21
C	$\sqrt{186}$	D	$\sqrt{458}$

تجميعات إضافية على الدرس الـرابـع عـشـر

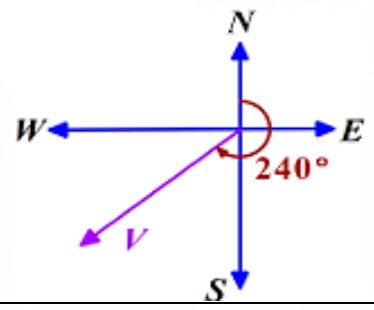
٣٢	في الشكل أدناه إذا كانت قيمة المتجه $A = 8$ والمتجه $B = 5$ ، فكم قيمة المحصلة R ؟			
(A)	$\sqrt{89}$	(B)	$\sqrt{34}$	
(C)	$\sqrt{19}$	(D)	$\sqrt{15}$	



٣٣	في الشكل ، احسب الإزاحة			
(A)	9	(B)	1	
(C)	8	(D)	5	



٣٤	في الشكل ، زاوية الاتجاه الربعي للمتجه هي			
(A)	S 60° W	(B)	$E60°S$	
(C)	W 60° S	(D)	$S\ 240°\ W$	



٣٥	عند تحليل المتجه إلى مركبتين ، فإن مقدار المتجه الأساسي يساوي						
(A)	قسمة إحدى مركبتيه	(B)	حاصل جمع مركبتيه	(C)	حاصل ضرب مركبتيه	(D)	متوسط قيمة مركبتيه

٣٦	أطلقت قذيفة بزاوية $45°$ مع الأفق ، وبسرعة إبتدائية $80\ m/s$ ، وبالتالي فإن سرعتها الأفقية بوحدة m/s تساوي :						
(A)	$80\sqrt{2}$	(B)	$40\sqrt{2}$	(C)	80	(D)	40

٣٧	إذا كان طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ يساوي 5 ، وكان $B\ \langle 2\ ,5\rangle$, $A\ \langle x\ ,1\rangle$ ، فما قيمة x ؟						
(A)	2	(B)	-1	(C)	1	(D)	-5

٣٨	إذا كان المتجهين $A = \langle 5\ ,-3\rangle\ , B = \langle 1\ ,4\rangle$ فإن $2A - B$ يساوي :						
(A)	$\langle 9\ ,-10\rangle$	(B)	$\langle 4\ ,-7\rangle$	(C)	$\langle 6\ ,1\rangle$	(D)	$\langle -3\ ,11\rangle$

٣٩	أوجد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه $v = \langle 3\ ,4\rangle$؟						
(A)	$\langle \frac{4}{3}\ ,\frac{5}{3}\rangle$	(B)	$\langle \frac{4}{5}\ ,\frac{5}{3}\rangle$	(C)	$\langle \frac{3}{5}\ ,\frac{4}{5}\rangle$	(D)	$\langle \frac{4}{5}\ ,\frac{5}{3}\rangle$

٤٠	ناتج ضرب متجهان عموديان غير صفريان يساوي :						
(A)	1	(B)	2	(C)	-1	(D)	0
٤١	إذا كان حاصل ضرب المتجهين u , v يساوي صفر فإن قياس الزاوية ؟						
(A)	90 "متعامدان"	(B)	90 "مستقيمة"	(C)	270	(D)	
٤٢	إذا كانت $u = \langle -1 , 4 \rangle$, $v = \langle 1 , 3 \rangle$ ، فأوجد $u \cdot v$						
(A)	11	(B)	-11	(C)	1	(D)	-1
٤٣	إذا كان : $y = \langle 1 , 3 \rangle$, $w = \langle -1 , 2 \rangle$ ، فما ناتج $y \cdot w$ ؟						
(A)	1	(B)	5	(C)	3	(D)	15
٤٤	إذا كان المتجهان $u = \langle 1 , -2 \rangle$, $v = \langle 3 , k \rangle$ متعامدين ، فما قيمة k ؟						
(A)	-2	(B)	$\frac{3}{2}$	(C)	$-\frac{3}{2}$	(D)	2
٤٥	إذا كان $y = \langle 1 , 3 \rangle$, $w = \langle -1 , 2 \rangle$ ، فما ناتج $y \cdot 3w$ ؟						
(A)	1	(B)	3	(C)	5	(D)	15
٤٦	إذا كانت $v = \langle 0 , 4 \rangle$, $u = \langle \sqrt{3} , 1 \rangle$ ، إذا قياس الزاوية بين المتجهين هي ؟						
(A)	$60°$	(B)	$30°$	(C)	$139°$	(D)	$120°$
٤٧	إذا كان $4j = 1 < v , \sqrt{3} =>$ u ، ما قياس الزاوية بين المتجهين u , v؟						
(A)	30	(B)	60	(C)	120	(D)	240
٤٨	ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1 , -1 \rangle$, $\langle 0 , -9 \rangle$ ؟						
(A)	$0°$	(B)	$45°$	(C)	$90°$	(D)	$135°$
٤٩	المسافة بين النقطتين $(2 , 7)(7 , 19)$ يساوي						
(A)	10	(B)	12	(C)	13	(D)	14
٥٠	إذا كان $v = (2 , 0 , -1)$, $u = (1 , -2 , 0)$ متجهين فإن $u \times v$ يساوي :						
(A)	$2i + j + 4k$	(B)	$-2i + j - 4k$	(C)	$2i - j + 4k$	(D)	$-2i - j - 4k$

⑤① إذا كان $v = \langle b , -3 , 1 \rangle , u = \langle -2 , -1 , 3 \rangle$ ، فما قيمة b التى تجعل المتجهين u , v متعامدين ؟							
(A)	-6	(B)	-3	(C)	3	(D)	6

⑤② إذا كان $v = \langle -2 , -1 , 4 \rangle , u = \langle b , -2 , 1 \rangle$ ، احسب قيمة b التى تجعل المتجهين متعامدين							
(A)	-5	(B)	-3	(C)	3	(D)	6

⑤③ ما مركز الدائرة من المعادلة $r = 2(\cos\theta - 2\sin\theta) + \frac{4}{r}$							
(A)	$(1 , 2)$	(B)	$(1 , -2)$	(C)	$(-1 , 2)$	(D)	$(-1 , -2)$

⑤④ إذا كان المتجه $a = \langle 3 , 5 \rangle$ وكان المتجه b موازي للمتجه a ولكن معاكس له في الاتجاه فإن الصورة الإحداثية للمتجه b هي							
(A)	$\langle -3 , -5 \rangle$	(B)	$\langle -5 , 3 \rangle$	(C)	$\langle -3 , -5 \rangle$	(D)	$\langle -3 , 5 \rangle$

①	A	⑪	B	㉑	C	㉛	C	㊶	A	⑤①	C
②	A	⑫	A	㉒	C	㉜	A	㊷	A	⑤②	C
③	A	⑬	B	㉓	A	㉝	D	㊸	B	⑤③	B
④	D	⑭	A	㉔	B	㉞	A	㊹	B	⑤④	C
⑤	A	⑮	C	㉕	B	㉟	B	㊺	D		
⑥	B	⑯	A	㉖	A	㊱	C	㊻	A		
⑦	A	⑰	A	㉗	C	㊲	B	㊼	B		
⑧	C	⑱	D	㉘	A	㊳	A	㊽	B		
⑨	A	⑲	C	㉙	C	㊴	C	㊾	C		
⑩	B	⑳	B	㉚	A	㊵	D	㊿	A		