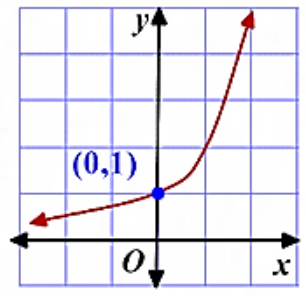
12) الـدوال : الأسيـة واللوغـاريتمـيـة

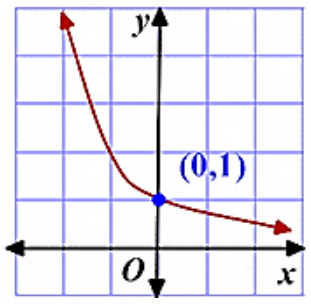
الدوال والمعادلات الأسية

- الدالة الرئيسية "الأم" : $f(x) = b^x$

$f(x) = b^x, b > 1$



$f(x) = b^x, 0 < b < 1$



المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
مقطع المحور y	$y = 1$
مقطع المحور x "أصفار الدالة"	لا يوجد

- تنبية : الدالة $f(x) = b^x$ متزايدة إذا كانت $b > 1$ ، ومتناقصة إذا كانت $0 < b < 1$
- فائدة : عند تساوى الأساسات تكون الأسس متساوية والعكس صحيح ....

$$b^y = b^x \iff y = x$$

حيث $b > 0 , b \neq 1$ ، فمثلا .....

$$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

- للتذكير : $a^0 = 1, a^{-1} = \frac{1}{a}$

مثـال : ما قيمة x التى تحقق المعادلة $3^{x-1} = 27$ ؟

Ⓐ 2 Ⓑ 3 6

Ⓒ 4 Ⓓ 5 24

الحـــل : بما أن $27 = 3^3$ فإن .....

$$3^{x-1} = 3^3$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 3 + 1 = 4$$

المتبـايـنـات الأسـيـة

$b > 1$	$b^x > x^y \iff x > y$
$0 < b < 1$	$b^x > x^y \iff x < y$

مثال توضيحي : نوجد قيمة x التى تحقق المتباينة $2^x > 2^5$ كالتالي :

$$2^x > 2^5 \Rightarrow x > 5$$

---

① منحنى الدالة الأسية $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ يقطع محور y في النقطة ....

A	$(0,0)$	B	$(0,1)$
C	$(1,0)$	D	$(1,1)$

② إذا كانت $2^{2x+2} = 2^{3x}$ فما قيمة x ؟

A	1	B	2
C	3	D	4

③ إذا كانت $2^{6x-3} = 8^{-3}$ فما قيمة x ؟

A	-1	B	1
C	4	D	21

④ إذا كانت $2^{2x+2} = 8$ فما قيمة x ؟

A	$\frac{1}{2}$	B	1
C	2	D	4

⑤ إذا كانت $2^{5x} = 4^{2x-1}$ فما قيمة x ؟

A	$-\frac{1}{7}$	B	-2
C	-1	D	$-\frac{1}{3}$

⑥ ما قيمة x التى تحقق المعادلة $16\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 81$؟

A	-4	B	-2
C	2	D	4

⑦ إذا كانت $f(x) = 2x^n - 16$ فأوجد قيمة n التى تجعل $f(2) = 0$

A	2	B	3
C	4	D	5

⑧ ما قيمة x التى تحقق المعادلة $\frac{2}{-(4)^{1-x}} = -2$ ؟

A	2	B	1
C	-1	D	-2

⑨ ما قيمة x التى تحقق المتباينة $16^{2x-3} > 8$ ؟

A	$x < \frac{15}{8}$	B	$x > \frac{15}{8}$
C	$x > \frac{5}{8}$	D	$x < \frac{5}{8}$

اللـوغـاريتمـــات

- $log_b x$ نقرؤها لوغاريتم x للأساس b حيث x موجب و $b > 1$.
- التحويل بين الصورتين الأسية و اللوغاريتمية ....

$$b^y = x \iff y = log_b x$$
$$b^y < x \iff y = log_b x$$

  - مثـال توضيحي : قيمة $log_2 25$ تساوي 2 لأن .....

$$25 = 5^2$$

- فائدة : عند كتابة اللوغاريتم بدون أساس فإن أساسه 10 ويُسمى "اللوغاريتم العشري" .
- مثال توضيحي : الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$ هي .....

$$(625)^{\frac{1}{4}} = 5 \xrightarrow{\text{تحول إلى الصورة اللوغاريتمية}} log_{625} 5 = \frac{1}{4}$$

مثـــال : إذا كان $log_x 32 = 5$ فما قيمة x ؟

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 5 Ⓓ 32

الحـل :

$$log_x 32 = 5 \xrightarrow{\text{تحول إلى الصورة الأسية}} x^5 = 32$$

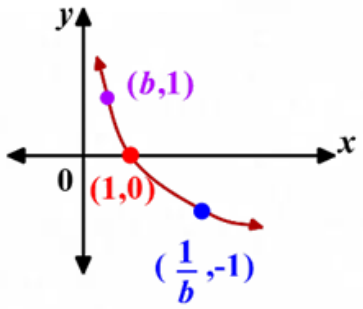
ومنه فإن .....

$$x^5 = 2^5 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

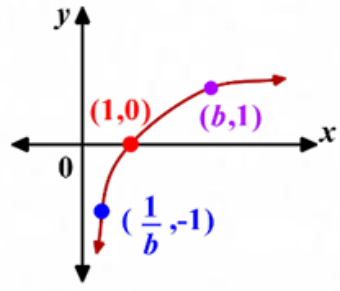
اللـوغـاريتمـــات

- الدالة الرئيسية "الأم": $f(x) = log_b x$ حيث x, b عددان موجبان و $b \neq 1$ ؟

$f(x) = log_b x, b > 1$



$f(x) = log_b x, 0 < b < 1$



- المجال : الأعداد الحقيقية الموجبة R^+.
- المدى : الأعداد الحقيقية R
- من صورة الدالة الوغاريتمية :

$$f(x) = \log_b(x - h) + k$$

- المجال : مجموعة حل المتباينة $x - h > 0$
- المقطع y : $y = f(0)$

⑩ ما قيمة $log_2 8$ ؟

A	2^8	B	8^2
C	8	D	3

⑪ الصورة الأسية المكافئة للصورة اللوغاريتمية $log_y x = k$ هي .....

A	$y^k = x$	B	$k^y = x$
C	$x^y = k$	D	$y^x = k$

⑫ إذا كان $log_x 81 = 2$ فإن x تساوي

A	2	B	9
C	27	D	81

⑬ إذا كان $log_3(x + 6) = 2$ فإن x تساوي .....

A	9	B	6
C	4	D	3

⑭ الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $25^{\frac{3}{2}} = 125$ هي .....

A	$log_5 25 = \frac{3}{2}$	B	$log_{25} 125 = \frac{3}{2}$
C	$log_5 125 = \frac{3}{2}$	D	$log_{125} 25 = \frac{3}{2}$

⑮ الصورة اللوغاريتمية المكافئة للعبارة اللوغاريتمية $log\ 100 = 2$ تساوى

A	$100 = 10^2$	B	$10 = 100^2$
C	$100 = 2^{10}$	D	$2 = 10^{100}$

⑯ ما الصورة الأسية المكافئة للعبارة الوغاريتمية $\log_2 x \geq 3$ ؟

A	$x \geq 3^2$	B	$x \geq 2^3$
C	$x \leq 3^2$	D	$x \leq 2^3$

⑰ مدى الدالة $f(x) = \log_3 x$ يساوي .....

A	R	B	$[3, \infty)$
C	R^+	D	W

⑱ ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_2(x + 1) + 3$ ؟

A	3	B	2
C	1	D	0

⑲ ما متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = \log_2 x$ على الفترة $[1, 2]$ ؟

A	-2	B	-1
C	1	D	2

خصائـص اللـوغـاريتمـات

- خصائص أساسية .....

$$log_b 1 = 0 \quad log_b b = 1 \quad log_b b^x = x$$

- من أهم الخصائص .....

الضرب	$log_x ab = log_x a + log_x b$
القسمة	$log_x \frac{a}{b} = log_x a - log_x b$
لوغاريتم القوة	$log_b m^p = p\, log_b m$
تغيير الأساس	$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$

مثـال 1 : ما قيمة المقدار التالي ؟

$$log_5(x+1) + log_5(x) - 2\, log_5(1+x)$$

Ⓐ $3\, log_5 x - log_5 1$ Ⓑ $3\, log_5 x$ Ⓒ $log_5 x^3$ Ⓓ $log_5 \frac{x}{x+1}$

الحـــل : المقدار يساوي .....

$$log_5(x+1) + log_5(x) - log_5(x+1)^2$$
$$= [log_5(x+1) - log_5(x+1)^2] + log_5(x)$$
$$= log_5 \frac{(x+1)}{(x+1)^2} + log_5(x)$$
$$= log_5 \left(\frac{1}{x+1} \times x\right)$$
$$= log_5 \frac{x}{x+1}$$

مثـال 2 : ما قيمة $log_5(0.008)$؟

Ⓐ -3 Ⓑ -2 Ⓒ 2 Ⓓ 3

الحـــل :

$$log_5(0.008) = log_5 \frac{8}{1000} = log_5 \left(\frac{2}{10}\right)^3$$
$$= log_5 \left(\frac{10}{2}\right)^{-3}$$
$$= log_5 (5)^{-3}$$
$$= -3$$

---

⑳ الصيغة الرياضية $\log_a a^n$ تساوي .....

A	n	B	a
C	1	D	-1

㉑ ما القيمة المختلفة عن القيم الثلاث الأخرى ؟

A	$log_2 16$	B	$log_3 81$
C	$log_5 125$	D	$log_4 256$

㉒ ما قيمة $log_6 \sqrt[3]{36}$

A	$\frac{3}{2}$	B	$1\frac{1}{3}$
C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{1}{2}$

㉓ ما قيمة $log_{16} 4 + log_7 \frac{1}{49}$ ؟

A	$-\frac{3}{2}$	B	$\frac{1}{2}$
C	1	D	$\frac{3}{2}$

㉔ ما قيمة $log_5 0.04$ ؟

A	-2	B	2
C	3	D	4.5

㉕ ما قيمة $log_{\sqrt{3}} 81$ ؟

A	2	B	4
C	6	D	8

㉖ إذا كانت $log_2 5 = 2.3$ فما قيمة $log_2 20$ ؟

A	4.3	B	4.6
C	9.2	D	10

㉗ المقدار $log\ x^2 + 3\, log\ x - log\ (x+1)$ يساوي .....

A	$log_5 x(x+1)$	B	$log_5 \frac{x+1}{x}$
C	$log\ x(x+1)$	D	$log\ \frac{x+1}{x}$

㉘ ما قيمة $log_{27} 81$ ؟

A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{8}$
C	$\frac{4}{3}$	D	$\frac{5}{36}$

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

- إذا كان كل من طرفي المعادلة أو المتباينة عبارة عن لوغاريتم ، ولهما نفس الأساس "أكبر من 1" ، فإننا نحذف اللوغاريتم من الطرفين ، فمثلا .....

$$log_3(x-2) = log_3 9 \Rightarrow x-2 = 9$$
(أو < أو >)

- تنبيهان .....
  - نعوض بقيم المتغيرات في المعادلة ونستبعد القيم التى تجعل المعادلة لوغاريتم سالب .
  - لإيجاد حل المتباينة اللوغاريتيمية نوجد المجال لاستبعاد القيم التى تجعل اللوغاريتم غير معرف .

٢٩	قيمة x في المعادلة $log_2 x = 3 - log_2(x-2)$ تساوي		
A	4	B	2
C	-2	D	-4

٣٠	أي التالي يمثل حلا للمعادلة $log_2(x^2-4) = log_2 3x$ ؟		
A	-2	B	-1
C	1	D	4

٣١	أي التالي يمثل حلا للمعادلة $2\,log_5 x - log_5 4 = log_5 9$ ؟		
A	6	B	9
C	18	D	36

٣٢	أي التالي يمثل حلا للمعادلة $log_2 4x + log_2 5 = log_2 100$ ؟		
A	$\sqrt{5}$	B	5
C	$5\sqrt{5}$	D	20

٣٣	إذا كانت الدالة $g(x) = 8^{x+5}$, $f(x) = log_2 x$ فأوجد $[f \circ g](x)$		
A	$x+5$	B	$2x+10$
C	$3x+15$	D	$8x+40$

٣٤	إذا كان $log_2(2x+3) > log_2(3x)$ فإن		
A	$x < 3$	B	$x > 3$
C	$0 > x > 3$	D	$0 < x < 3$

تجميعات إضافية على الدرس الثـاني عـشــر

٣٥	إذا كانت $3^{x+7} = 9^{x+2}$ فما قيمة x ؟						
(A)	2	(B)	3	(C)	4	(D)	5
٣٦	ما قيمة x فما يلي : $3^{3-1} = 27$ ؟						
(A)	5	(B)	4	(C)	3	(D)	2
٣٧	أوجد قيمة x فيما يلي : $6^{(4x-2)} = 36$ ؟						
(A)	5	(B)	6	(C)	4	(D)	1
٣٨	إذا كان $\log_x(32) = 5$ فما قيمة x ؟						
(A)	1	(B)	2	(C)	5	(D)	32
٣٩	ما قيمة $\log_{125} 5$ ؟						
(A)	$\frac{1}{3}$	(B)	$\frac{1}{2}$	(C)	3	(D)	2
٤٠	حول الصورة اللوغاريتمية التالية إلى أسية $\log_x y = k$ ؟						
(A)	$x^k = y$	(B)	$y^x = k$	(C)	$k^x = y$	(D)	$k^y = x$
٤١	ما قيمة : $\log_2 5 + \log_2 4$						
(A)	$\log_2 20$	(B)	$\log_4 20$	(C)	$\log_2 \frac{5}{4}$	(D)	$\log_4 \frac{5}{4}$
٤٢	الصورة الأسية $5^3 = 125$ تكافئ ؟						
(A)	$\log_5 125 = 3$	(B)	$\log_5 3 = 125$	(C)	$3 \log_5 = 125$	(D)	$\log_3 125 = 5$
٤٣	اكتب $x = \sqrt[5]{8}$ بالصورة اللوغاريتمية :						
(A)	$\log_{\frac{1}{5}} x = 8$	(B)	$\log_8 5 = x$	(C)	$\log_8 x = \frac{1}{5}$	(D)	$\log_{\frac{1}{5}} 8 = x$
٤٤	إذا كان $\log_3(x+6) = 2$ فإن x تساوي :						
(A)	9	(B)	6	(C)	4	(D)	3

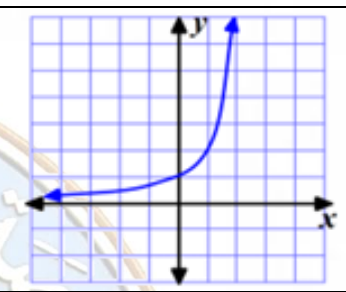
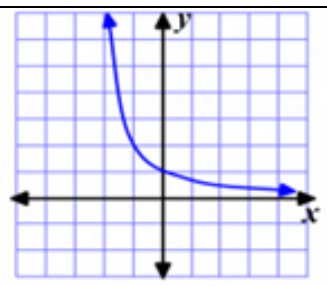
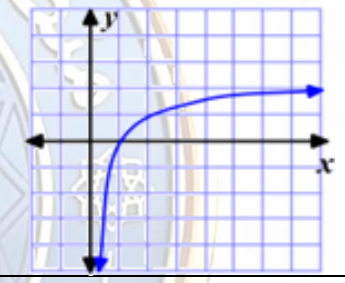
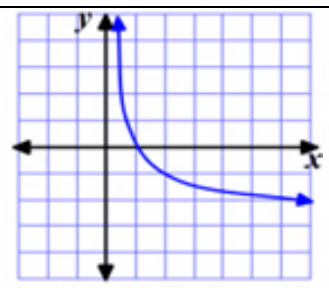
٤٥	إذا كان $\log_4(2x+8)=\frac{1}{2}$ فإن x تساوي :						
(A)	3	(B)	2	(C)	-2	(D)	-3
٤٦	ما مقدار $\log_4 64$ ؟						
(A)	4	(B)	16	(C)	3	(D)	9
٤٧	ما قيمة $\log_5(3125)$ ؟						
(A)	5	(B)	9	(C)	6	(D)	7
٤٨	ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$ ؟						
(A)	5	(B)	-5	(C)	$\frac{1}{5}$	(D)	$-\frac{1}{5}$
٤٩	ما قيمة $\log_{1000} 10$ ؟						
(A)	3	(B)	$\frac{-1}{3}$	(C)	$\frac{1}{3}$	(D)	-3
٥٠	ما قيمة المقدار $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ ؟						
(A)	1	(B)	2	(C)	3	(D)	6
٥١	ما هي قيمة x التى تجعل العلاقة التالية صحيحة $\log_{\sqrt{a}}(a)=x$ ؟						
(A)	$\frac{1}{2}$	(B)	$-\frac{1}{2}$	(C)	2	(D)	-3
٥٢	أوجد قيمة x التى تحقق المعادلة : $1+2\log_2(x+1)=5$						
(A)	3	(B)	-3	(C)	1	(D)	2
٥٣	ما قيمة : $\log_2 5+\log_2 4$						
(A)	$\log_2 20$	(B)	$\log_4 20$	(C)	$\log_2 \frac{5}{4}$	(D)	$\log_4 \frac{5}{4}$
٥٤	إذا كان $2^{15}+2^{15}=2^x$ ، فما قيمة x ؟						
(A)	0	(B)	30	(C)	16	(D)	15
٥٥	ما قيمة المقدار $\log_3 13-\log_3 5$						
(A)	$\log_5 23$	(B)	$\log_3 \frac{13}{5}$	(C)	$\log_{13} 5$	(D)	$\frac{13}{5}$

٥٦	المقدار $\log_5(2x-5) - 2\log_5 x$ يساوي :						
(A)	$\log_5 \frac{5}{2x-5}$	(B)	$\log_5 \frac{2x-5}{x^2}$	(C)	$\log_5 \frac{x^2}{2x-5}$	(D)	$\log_5 \frac{x}{2x+5}$
٥٧	ما مقدار $\log_5(x+1) + \log_5 x - 2\log_5(1+x)$ ؟						
(A)	$3\log_5 x - \log_5 1$	(B)	$\log_5 x^3$	(C)	$3\log_3 x$	(D)	$\log_5 \frac{x}{x+1}$
٥٨	حل المعادلة $(\log_2(\log_2(2x+8))) = \frac{1}{2}$ هو ؟						
(A)	8	(B)	6	(C)	4	(D)	2
٥٩	العبارة اللوغاريتمية $\log_4 x + 5\log_2 y + 3\log_2 z$ تكافئ :						
(A)	$15\log_2 xyz$	(B)	$9\log_2 xyz$	(C)	$\log_2 xy^5z^3$	(D)	$3\log_2 xyz$
٦٠	إذا كان $\log_3(x^2-6) - \log_3 5x = 0$ فما قيمة x ؟						
(A)	6	(B)	-1	(C)	-6	(D)	1
٦١	حل المعادلة $\log_3 2 = \log_3(x-2)(x+4)$ يساوي : $\log_3(x^2+x-6)$						
(A)	2	(B)	-5	(C)	-1	(D)	1
٦٢	قيمة المقدار $3\log_3 9 - \log_5 \frac{1}{25}$						
(A)	8	(B)	4	(C)	10	(D)	6
٦٣	حل المعادلة $16^{x+2} \cdot 8^x = \frac{4}{2^x}$ هو :						
(A)	8	(B)	4	(C)	$-\frac{3}{4}$	(D)	$-\frac{2}{8}$
٦٤	عدد طلاب في مدرسة ما 500 طالب في عام 1437 إذا كانت نسبة الزيادة في أعداد الطلاب سنويا 20 % ، فإن عدد الطلاب في عام 1440؟						
(A)	900	(B)	864	(C)	961	(D)	480
٦٥	ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = log_2(x+1) + 3$ ؟						
(A)	3	(B)	2	(C)	1	(D)	0
٦٦	مجال الدالة $log_2 x$:						
(A)	R	(B)	Z	(C)	R^+	(D)	R^-

⑯ ما حل المتباينة $16^{2x-3} < 8$ هو :							
(A)	$x < \frac{15}{8}$	(B)	$x < \frac{5}{8}$	(C)	$x > \frac{15}{8}$	(D)	$x > \frac{5}{8}$

⑰ عين مجال الدالة $f(x) = \log \sqrt{x^2 - 4}$:			
(A)	$\{x \mid x \in R - [-2\,,2]\}$	(B)	$\{x \mid x \in R - (-2\,,2)\}$
(C)	$\{x \mid x \in R - [-2\,,2)\}$	(D)	$\{x \mid x \in R - (-2\,,2]\}$

⑱ خط التقارب للدالة $f(x) = \frac{1}{5}\, log\,(x-3)$ هو							
(A)	$x = 3$	(B)	$x = \frac{1}{5}$	(C)	$x = -3$	(D)	$x = -\frac{1}{5}$

⑲ الدالة العكسية للدالة $f(x) = 4^x$ هي :			
(A)		(B)	
(C)		(D)	

⑳ احسب قيمة x $5^{x-2} + 3 = 4$							
(A)	1	(B)	2	(C)	3	(D)	4

㉑ $log_2 \frac{4^2}{8}$							
(A)	1	(B)	2	(C)	3	(D)	4

㉒ $\left(\frac{3}{5}\right)^{2b-4} = \left(\frac{25}{9}\right)^{b-2}$							
(A)	1	(B)	2	(C)	3	(D)	8

㉓ $\log_5 x^2 = 4$							
(A)	$\pm\frac{1}{25}$	(B)	$\pm\frac{1}{5}$	(C)	± 25	(D)	± 5

⑦٥ المقدار $\log_3 3 + \log_3 9$ يساوي :							
(A)	$\log_3 12$	(B)	$\log_3 3$	(C)	$\log_3 9^3$	(D)	$\log_3 27$
⑦٦ $2^{x-3} + 2^3 = 9$							
(A)	1	(B)	2	(C)	3	(D)	4
⑦٧ $\log\ 3x^2y + \log\ xy - \log\ x^2y^2$							
(A)	$\log 3xy$	(B)	$\log 3x$	(C)	$\log xy^2$	(D)	$\log 3x^2y^2$
⑦٨ $\log_3 729$							
(A)	3	(B)	4	(C)	5	(D)	6
⑦٩ $\log_3 \sqrt{81}$							
(A)	2	(B)	4	(C)	8	(D)	-8
⑧٠ إذا كانت $\log_3 \frac{1}{81}$ فما قيمة x							
(A)	4	(B)	-4	(C)	2	(D)	-2
⑧١ إذا كن $x = \log_4 16$ فما قيمة x							
(A)	16	(B)	8	(C)	4	(D)	2
⑧٢ $\log_3 9^{x-1} = 0$							
(A)	1	(B)	2	(C)	-1	(D)	-2
⑧٣ ما قيمة x التى تحقق المعادلة $\log_3 9^{2-x} = 0$							
(A)	1	(B)	2	(C)	-1	(D)	-2
⑧٤ ما قيمة n التى تحقق المعادلة $2x^n - 32 = 0$ علمًا بأن $x = 2$							
(A)	3	(B)	5	(C)	2	(D)	4
⑧٥ إذا كانت $x = 2$ فما قيمة m التى تجعل الدالة $f(x) = 2x^m - 32$ تساوي صفرًا؟							
(A)	0	(B)	2	(C)	4	(D)	8

⑧⑥ منحنى الدالة $f(x) = \log_2 x$ يقطع المحور x في ؟							
(A)	$(1\ ,0)$	(B)	$(0\ ,0)$	(C)	$(1\ ,1)$	(D)	$(0\ ,1)$

⑧⑦ المقدار $343^{\frac{2}{3}}$ يساوى							
(A)	49	(B)	64	(C)	7	(D)	$\frac{1}{7}$

⑧⑧ أي من القيم n تجعل الدالة الأسية $f(x) = \left(\frac{n}{5}\right)^x$ دالة اضمحلال أسي ؟							
(A)	3	(B)	5	(C)	7	(D)	9

⑧⑨ المقطع y للدالة $f(x) = -4^{x+1} - 1$:							
(A)	-1	(B)	-5	(C)	-4	(D)	-11

D	⑧①	B	⑦①	B	⑥①	C	⑤①	A	④①	A	③①	C	②①	A	①①	D	①
A	⑧②	A	⑦②	A	⑥②	A	⑤②	A	④②	B	③②	C	②②	B	①②	D	②
B	⑧③	B	⑦③	C	⑥③	A	⑤③	C	④③	C	③③	A	②③	D	①③	A	③
D	⑧④	C	⑦④	B	⑥④	C	⑤④	D	④④	D	③④	A	②④	B	①④	A	④
C	⑧⑤	D	⑦⑤	A	⑥⑤	B	⑤⑤	D	④⑤	B	③⑤	D	②⑤	A	①⑤	D	⑤
A	⑧⑥	C	⑦⑥	C	⑥⑥	C	⑤⑥	C	④⑥	B	③⑥	A	②⑥	B	①⑥	B	⑥
A	⑧⑦	B	⑦⑦	A	⑥⑦	D	⑤⑦	A	④⑦	D	③⑦	C	②⑦	A	①⑦	B	⑦
A	⑧⑧	D	⑦⑧	A	⑥⑧	C	⑤⑧	B	④⑧	B	③⑧	C	②⑧	A	①⑧	B	⑧
B	⑧⑨	A	⑦⑨	A	⑥⑨	C	⑤⑨	B	④⑨	A	③⑨	A	②⑨	C	①⑨	B	⑨
		B	⑧⓪	C	⑦⓪	A	⑥⓪	C	⑤⓪	A	④⓪	D	③⓪	A	②⓪	D	⑩